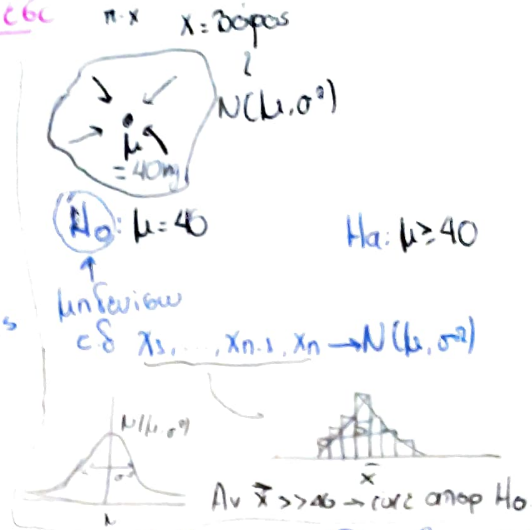
ΤΡΙΤΗ 11 ΜΑΙΟΥ 2021 - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Έλεγχοι Στατιστικών Υποθέσεων - Στατιστικά Τεστ

Στοιχεία Στατιστικού Τεστ



Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ (για εμάς $m=1$)

Στατιστικές υποθέσεις: Ισχυρισμοί, απόψεις, εικασίες που εκφράζονται μέσω της θ π.χ.

$H_0: \theta=\theta_0$ (θ_0 γνωστό) έναντι H_a: $\begin{cases} \theta>\theta_0 \\ \theta<\theta_0 \\ \theta\neq\theta_0 \end{cases}$

μηδενική

Απλή Υπόθεση: Αν προσδιορίζει πλήρως την $f(x,\theta)$ π.χ. η $H: \theta=4$ προσδιορίζει πλήρως την $f(x,4)$ γιατί αν $f(x,\theta)=\theta e^{-\theta x}$ το $f(x,4)=4e^{-4x}$

Σύνθετη Υπόθεση: Δεν προσδιορίζει πλήρως την $f(x,\theta)$ π.χ. η $H: \theta>4$ δεν προσδιορίζει την $f(x,\theta)$ γιατί αν $f(x,\theta)=\theta e^{-\theta x}$ τότε με την H $f(x,\theta)=\theta e^{-\theta x}$, $\theta>4$

Στατιστική Συνάρτηση Τεστ (ΣΣΤ) Κάθε συνάρτηση του τ.δ. $T=T(\underline{X})$ που αξιοποιείται για τον έλεγχο των H_0, H_a (συνήθως επαρκές, ΑΟΕΔ κλπ.)

Κρίσιμη Περιοχή (κ.π.) Ονομάζεται κρίσιμη περιοχή ένα υποσύνολο του συνόλου τιμών της ΣΣΤ $T(\underline{x})=T(x_1,\dots,x_n)$, το οποίο μας επιτρέπει να ταχθώ υπέρ ή κατά της H_0. Είναι της μορφής: $C=\{\underline{x} : T(\underline{x}) \in A \subseteq \mathbb{R}\}$. A εξαρτάται από την μορφή της H_a.

Κανόνας Λήψης Απόφασης: Αν η τιμή της ΣΣΤ πέφτει μέσα στην κρίσιμη περιοχή C, τότε απορρίπτω την H_0. Διαφορετικά η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί.

Σφάλματα τύπου I και II

Σφάλμα τύπου I ⇝ Απόρριψη της H_0, όταν η H_0 είναι αληθής.

Σφάλμα τύπου II ⇝ Αποδοχή της H_0, όταν η H_a είναι αληθής.

Πιθανότητες Σφαλμάτων

$\alpha = P(\text{Σφ Τύπου I}) = P(\text{απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής})$

$\beta = P(\text{Σφ. Τύπου II}) = P(\text{αποδ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθής})$

Ισχύς του τεστ: $\gamma = 1-\beta = 1 - P(\text{αποδ } H_0 \mid H_a \text{ αληθ}) = P(\text{απορ } H_0 \mid H_a \text{ αληθ})$

Ιδέα Θεωρίας Neyman-Pearson για κατασκευή τεστ.

Βρες την κ.π.ς τέτοια ώστε τα α, β να είναι ελάχιστα, ή το α ελάχιστο και η ισχύς γ μέγιστη.

↓ Όμως τα α, β δεν ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα.

Άρα αναζητώ κ.π.ς για την οποία το α είναι πολύ μικρό, π.χ $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$ και ελαχιστοποιώ το β ή μεγιστοποιώ το γ.

Τα $\alpha = 0.01$ ή 0.05 ή 0.1 → λέγεται επίπεδο σημαντικότητας του τεστ (ε.σ)

↓ Στην ιδέα αυτή βασίζονται τα Ι-τεστ και ΟΙ-τεστ.

Ι-τεστ Έστω ο έλεγχος απλής ή σύνθετης H_0 έναντι απλής H_a. Ισχυρότατο τεστ με ε.σ α για τον έλεγχο αυτό ονομάζεται το τεστ με τη μέγιστη ισχύ γ μεταξύ όλων των άλλων τεστ με το ίδιο ε.σ

Ομοιόμορφα Ισχυρότατο Τεστ (ΟΙ-τεστ) Έστω ο έλεγχος μιας απλής ή σύνθετης H_0 έναντι μιας σύνθετης H_a. Θεωρούμε ένα τεστ για τον έλεγχο αυτόν και έστω $\gamma(\theta)$ η ισχύς, με θ να ικανοποιεί την H_a. Το τεστ αυτό ονομάζεται ομοιόμορφα ισχυρότατο αν η ισχύς του $\gamma(\theta)$ είναι $\forall \theta$ μεγαλύτερη ή ίση από την ισχύ οποιουδήποτε άλλου τεστ με το ίδιο ε.σ.

Θεμελιώδες Λήμμα Neymann-Pearson

Έστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Έστω προς έλεγχο: $H_0: \theta = \theta_0$ (απλή) έναντι $H_a: \theta = \theta_a$ (απλή) με $\theta_0, \theta_a \in \Theta$. Αν υπάρχει μια κ.π.ς μεγέθους α και ένας σταθερός $k \geq 0$, τέτοιος ώστε:

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_a)} \leq k \quad \forall\, \underline{x} \in ς$$

και

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_a)} > k, \quad \forall\, \underline{x} \in S - ς$$

τότε η κ.π.ς είναι η Ι-κ.π με ε.σ α για τον παραπάνω έλεγχο.

Εφαρμογή του Λήμματος Ξεκινάμε από την $\frac{L_0}{L_a} \leq k$ και προσπαθούμε να την γράψουμε στη μορφή $T(\underline{x}) \gtrless k^*$. Τότε $T(\underline{x})$ είναι η Σ.Σ.Τ και το k^* καθορίζεται από το $\alpha = P(\text{Απορ } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ.})$

Έλεγχος μέσης τιμής κανονικού πληθυσμού (z-test)

Έστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό. Έστω $H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι $H_a: \mu=\mu_a$ (μ_a γνωστό) $\mu_a > \mu_0$

Η Ι-κπ. είναι $\frac{L_0}{L_a} \leq k$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\frac{L_0}{L_a} \leq k \Rightarrow \frac{\cancel{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\cancel{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_a)^2}} \leq k \Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum(x_i-\mu_0)^2 - \sum(x_i-\mu_a)^2\right\}} \leq k$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum(x_i-\mu_0)^2 - \sum(x_i-\mu_a)^2\right\} \leq \log k \Rightarrow \sum(x_i-\mu_0)^2 - \sum(x_i-\mu_a)^2 \geq -2\sigma^2\log k$$

$$\Rightarrow \sum(x_i^2 - 2\mu_0 x_i + \mu_0^2) - \sum(x_i^2 - 2\mu_a x_i + \mu_a^2) \geq -2\sigma^2\log k$$

$$\Rightarrow 2(\mu_a-\mu_0)\sum_{i=1}^{n} x_i \geq -2\sigma^2\log k + n(\mu_a^2-\mu_0^2)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{-2\sigma^2\log k + n(\mu_a^2-\mu_0^2)}{2(\mu_a-\mu_0)} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{-2\sigma^2\log k + n(\mu_a^2-\mu_0^2)}{2n(\mu_a-\mu_0)} = k^*$$

$$\Rightarrow \bar{x} \geq k^*$$

Άρα καταλήξαμε: $\frac{L_0}{L_a} \leq k \iff \bar{x} \geq k^*$

Άρα η Ι-κπ. με ε.σ. α είναι $\bar{x} \geq k^*$

__Υπολογισμός κρίσιμου σημείου (κ.σ) k^*__

$$\alpha = P(\text{απορ } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής}) = P\left(\bar{x} \geq k^* \mid x_1, \dots, x_n \sim N(\mu_0, \sigma^2)\right) =$$

$$= P\left(\bar{x} \geq k^* \mid \bar{x} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)\right) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k^*-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \bar{x} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{k^*-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \mid Z \sim N(0,1)\right) \Rightarrow \frac{k^*-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_\alpha \Rightarrow \boxed{k^* = \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Συμπερασματικά: Για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_a: \mu=\mu_a$, $\mu_a>\mu_0$ το Ι-τεστ με ε.σ. α είναι $\bar{x} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ή $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_a$

ή

Για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_a: \mu=\mu_a$ $(\mu_a>\mu_0)$ η ΣΣΤ είναι $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό την H_0 και κ.π. $Z \geq Z_a$